

基于子张量重构的宽带信号 DOA 估计

韦娟¹, 陈茂楠¹, 宁方立²

(1. 西安电子科技大学通信工程学院, 陕西 西安 710071; 2. 西北工业大学机电学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 针对现有宽带信号波达方向估计算法在低信噪比和低快拍条件下估计精度下降的问题, 提出一种基于子张量重构的宽带信号 DOA 估计算法。该算法首先将原始张量沿横轴和纵轴分割成多个子张量, 经重拼接形成多维张量, 再通过张量维度合并重构为优化后的三维张量。然后采用基于张量核范数的低秩张量补全算法对重构张量进行高效补全, 并利用张量分解算法得到信号子空间, 实现 DOA 估计。仿真和实验结果表明, 所提算法在低信噪比条件下, DOA 估计的均方根误差明显优于已有算法, 在快拍数低至 20 时仍有稳定的估计性能, 这表明所提算法具有良好的抗噪性和快拍鲁棒性。

关键词: 波达方向估计; 宽带信号; 张量重构; 张量补全

中图分类号: TN912.3

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2025152

DOA estimation of wideband signals based on sub-tensor reconstruction

WEI Juan¹, CHEN Maonan¹, NING Fangli²

1. School of Communication Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China

2. School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

Abstract: Concerning the issues of performance degradation in wideband direction-of-arrival (DOA) estimation algorithms under low signal-to-noise ratio and limited snapshot conditions, a sub-tensor reconstruction-based DOA estimation algorithm was proposed. Initially, the original tensor was decomposed into multiple sub-tensors along both horizontal and vertical axes through tensor partitioning, which were then reassembled into a higher-dimensional tensor structure. Subsequently, an optimized three-dimensional tensor was reconstructed via tensor dimension merging. A nuclear norm-based low-rank tensor completion algorithm was employed to efficiently recover the reconstructed tensor. Finally, DOA estimation was achieved through tensor decomposition for signal subspace extraction. Simulation and experimental results demonstrate that, compared to existing algorithms, the proposed algorithm achieves significantly superior root mean square error performance under low signal-to-noise ratio conditions, while maintaining stable estimation performance even with snapshot numbers as low as 20, proving the algorithm's excellent noise resistance and snapshot robustness.

Keywords: direction of arrival estimation, wideband signal, tensor reconstruction, tensor completion

收稿日期: 2025-05-30; 修回日期: 2025-08-01

通信作者: 宁方立, ningfl@nwpu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.52475132); 陕西省重点研发计划基金资助项目(No.2024GX-ZDCYL-01-16); 航空科学基金资助项目(No.20200015053001); 2023 西安市重点产业链技术攻关基金资助项目(No.23ZDCYJSGG0006-2023)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.52475132), The Key Research and Development Program of Shanxi Province (No.2024GX-ZDCYL-01-16), Aeronautical Science Foundation of China (No.20200015053001), 2023 Xi'an Key Industrial Chain Technology Research Project (No.23ZDCYJSGG0006-2023)

0 引言

波达方向 (DOA, direction of arrival) 估计是阵列信号处理中的核心问题之一, 在雷达^[1]、自主导航^[2]和无线通信^[3]等应用中起着重要作用。DOA 估计的基本问题是确定处在空间中某一区域内多个信号的空间位置, 即各信号到达阵列参考阵元的方位角。相较于窄带信号, 宽带信号拥有更大的带宽和更丰富的频域信息, 从而能够显著提升目标分辨能力、低信噪比条件下的检测概率以及高精度测向性能^[4]。

目前, 关于宽带信号的高分辨 DOA 估计算法主要分为 2 类: 一类是文献[5]提出的非相干信号子空间方法 (ISSM, incoherent signal-subspace method), 另一类是文献[6]提出的相干信号子空间方法 (CSSM, coherent signal-subspace method)。2 类方法均是基于频率分解, 将宽带信号分解为多个窄带信号再进行 DOA 估计。CSSM 需要对每个窄带信号进行频率聚焦, 计算复杂度高于 ISSM, 且在构造聚焦矩阵时需对 DOA 信息进行预估计, 若初始估计偏差较大, 会导致聚焦失效^[7]。相比之下, ISSM 计算简单, 不需要聚焦操作, 但其使用窄带算法^[8-9]独立处理各窄带信号, 忽略了不同窄带信号之间的相干性, 未充分利用频点间信息, 导致 DOA 估计精度不高, 抗噪性较差。

为了更好地利用多维数据集中蕴含的信息, 学者展开了基于张量理论的方法研究^[10-12]。张量作为一种多维数据结构, 相较于矩阵, 可以更好地利用高阶数据的结构信息和不同维度间的关联性, 具备多维数据特征提取能力^[13-15]。文献[10-11]设计了基于张量的双基地多输入多输出雷达参数估计框架, 并分别利用张量分解和张量补全技术实现参数的估计。文献[12]通过构建范德蒙德结构约束的张量 CP 分解模型, 实现了具有较好估计性能和低复杂度的信道估计算法。文献[13-15]提出了针对稀疏阵列、嵌套阵列和不完全阵列的张量处理方法。同时, 张量分解模型中的规范多元 (CP, canonical polyadic) 分解^[16]在满足 Kruskal 条件时具有唯一性^[17-19]。

针对宽带信号, 文献[20]将张量 CP 分解与基于旋转不变子技术的信号参数估计 (ESPRIT, estimation of signal parameter via rotational invariance technique) 相结合, 建立了基于均匀线阵的 DOA

估计张量计算框架。但该算法仅考虑了信号在不同接收阵列之间的空域差异性, 忽视了宽带信号场景下各频点间的频谱差异这一关键特征。文献[21]考虑到宽带信号 DOA 估计鲁棒性差的问题, 提出了一种基于张量域降噪的估计算法, 从高维度分离信号和噪声, 减弱噪声的影响。该算法虽利用张量进行降噪, 但后续利用协方差拟合算法单独处理每个窄带信号, 忽略了频点间的差异性。文献[22-23]提出基于张量 CP 分解的宽带高分辨率 DOA 估计算法, 先将不同频率信号的导向矩阵聚焦到一个公共子空间, 再结合 ESPRIT 算法构建三维张量, 并利用张量 CP 分解算法实现 DOA 估计。此类算法虽能联合处理窄带分量, 但需要进行聚焦操作。

为了在不引入聚焦算法的前提下, 利用张量联合处理窄带信号, 文献[24]通过数学推导, 深入分析了宽带信号不同频率分量在同一接收阵列中的响应特性差异, 通过构建虚拟阵列实现了不同频率信号导向矩阵的统一, 并通过张量补全和张量分解, 实现了宽带信号的 DOA 估计。但该算法在对张量进行重构时, 引入了 Toeplitz 重构操作^[25], 在低信噪比和低快拍条件下难以实现高精度估计。构建的虚拟张量中存在缺失元素, 需要利用张量补全算法进行补全算法。文献[26]提出了基于核范数之和 (SNN, sum of nuclear norm) 的低秩张量补全算法。文献[27-28]提出了使用基于张量奇异值分解的张量核范数 (TNN, tensor nuclear norm) 和张量封顶核范数 (TCNN, tensor capped nuclear norm) 进行图像补全算法。SNN 在 DOA 估计中的有效性已得到验证^[18,24], 但因为 SNN 算法所需的测量次数远高于张量 Tucker 秩的自由度, 所以 SNN 不是张量 Tucker 秩的最佳凸松弛^[27]。

综上所述, 联合基于 TNN 的重构张量补全算法, 本文提出一种基于子张量重构 (STR, sub-tensor reconstruction) 的宽带信号 DOA 估计算法, 简记为 STR-TNN。STR 算法通过对原始张量分割再重拼接, 不仅能实现对原始张量中缺失元素的重分布, 还能对张量维度进行重构, 进而提高 DOA 估计算法的抗噪性和快拍鲁棒性。此外, 考虑到重构张量的维度增加会导致算法复杂度快速提高, 利用基于 TNN 的张量补全算法不仅可以降低算法复杂度、提升计算效率, 还可进一步提升算法的抗噪性和估计精度。

1 基于虚拟域的宽带信号模型

假设一个均匀线性阵列由 M 个传声器组成, 相邻传声器间距为 d 。若空间中有 K 个独立的宽带远场声源信号入射到阵列中, 将第一个传声器视为参考传声器, 则第 m 个传声器在 t 时刻接收到的信号可表示为

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t - \tau_m(\theta_k)) + n_m(t) \quad (1)$$

其中, $s_k(t)$ 为第 k 个声源, θ_k 为第 k 个声源的 DOA, $\tau_m(\theta_k)$ 为第 k 个声源到达第 m 个传声器相对于到达阵列参考传声器的时延, $n_m(t)$ 为第 m 个传声器的噪声。

将 M 元传声器阵列采集的时域信号划分为 L 段等长的快拍序列。通过对各段信号施加离散傅里叶变换 (DFT), 在频域分解为 J 个相互独立的窄带分量, 每个分量对应不同的频点

$$\mathbf{X}_l(f_j) = \mathbf{A}(f_j)\mathbf{S}_l(f_j) + \mathbf{N}_l(f_j) \quad (2)$$

其中, $l=1,2,\dots,L$, $j=1,2,\dots,J$, $\mathbf{X}_l(f_j)=[X_{1l}(f_j), X_{2l}(f_j), \dots, X_{Ml}(f_j)]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$, $\mathbf{S}_l(f_j)=[s_{1l}(f_j), s_{2l}(f_j), \dots, s_{Pl}(f_j)]^T \in \mathbb{C}^{K \times 1}$, $\mathbf{N}_l(f_j)=[N_{1l}(f_j), N_{2l}(f_j), \dots, N_{Ml}(f_j)]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$, $\mathbf{A}(f_j)=[\mathbf{a}(f_j, \theta_1), \mathbf{a}(f_j, \theta_2), \dots, \mathbf{a}(f_j, \theta_P)] \in \mathbb{C}^{M \times K}$, $\mathbf{a}(f_j, \theta_k)=[1, e^{-\frac{j2\pi f_j}{c} d \sin(\theta_k)}, \dots, e^{-\frac{j2\pi f_j}{c} (M-1)d \sin(\theta_k)}]^T$

表示第 k 个声源在频率 f_j 处的导向矢量, c 表示声速。

对于得到的 J 组互不相关的窄带频域分量, 选取其中 P 条窄带作为有效分析频带, 对应频率为 $[f_0, f_1, \dots, f_P]$, 且满足 $f_i = \zeta_i f_0$, ζ_i 是一个正整数, 将 f_0 作为参考频率, 则导向矢量 $\mathbf{a}(f_i, \theta_k)$ 可表示为

$$\mathbf{a}(f_i, \theta_k) = \left[1, e^{-\frac{j2\pi f_0}{c} \zeta_i d \sin(\theta_k)}, \dots, e^{-\frac{j2\pi f_0}{c} \zeta_i (M-1)d \sin(\theta_k)} \right]^T \quad (3)$$

由此将窄带频域特征差异映射至空域维度进行表征, 每一条有效分析频带均可生成一个对应的虚拟阵列

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i &= \{ \zeta_i m d \mid m \in \{0, 1, \dots, M-1\} \} = \mathbb{S}_i d \\ \mathbb{S}_i &= \zeta_i m \end{aligned} \quad (4)$$

其中, \mathbb{P}_i 表示实际阵元在虚拟阵列中的位置, \mathbb{S}_i 为传声器的索引。

将多个虚拟阵列组合成一个阵列 \mathbb{U}_0

$$\mathbb{U}_0 = \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2 \cup \dots \cup \mathbb{P}_P \quad (5)$$

令 \mathbb{U}_0 中最大的元素为 $\max(\mathbb{U}_0) = (M_v - 1)d$, 由此生成一个传声器数量为 M_v 的均匀线性阵列 \mathbb{U}

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= \{0, d, 2d, \dots, (M_v - 1)d\} = \mathbb{S}d \\ \mathbb{S} &= \{0, 1, 2, \dots, M_v - 1\} \end{aligned} \quad (6)$$

将每一条有效分析频带生成的虚拟阵列 \mathbb{P}_i 扩展成 \mathbb{U} , 图 1 给出了一个基于 4 个传声器、2 条有效分析频带的虚拟阵列示例。

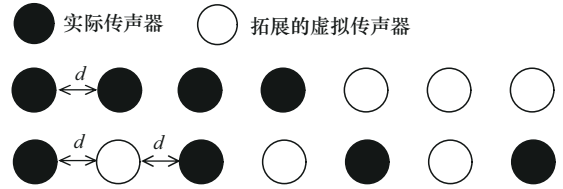


图 1 经过扩展的虚拟阵列

令 $\mathbf{X}_i(t) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 表示虚拟阵列 \mathbb{P}_i 对应的接收信号, $\tilde{\mathbf{X}}_i(t) \in \mathbb{C}^{M_v \times 1}$ 表示经过虚拟阵列扩展后的接收信号, 则 $\tilde{\mathbf{X}}_i(t)$ 与 $\mathbf{X}_i(t)$ 之间的映射关系为

$$\langle \tilde{\mathbf{X}}_i(t) \rangle_q = \begin{cases} \langle \mathbf{X}_i(t) \rangle_q, & \phi_q \in \mathbb{S}_i \\ 0, & \phi_q \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_i \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\langle \cdot \rangle_q$ 表示 \cdot 中位于 $\phi_q d$ 处的传声器接收到的信号, $q=1,2,\dots,M_v$, ϕ_q 表示集合 \mathbb{S} 中的第 q 个元素, $\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_i$ 表示属于集合 \mathbb{S} 但不属于集合 \mathbb{S}_i 的所有元素组成的集合。

计算选定的 P 条有效分析频带对应的 $\tilde{\mathbf{X}}_i(t)$ 的协方差矩阵, 并将其按照频率维度拼接, 可得到缺省增广虚拟域张量 $\tilde{\mathcal{X}} \in \mathbb{C}^{M_v \times M_v \times P}$

$$\tilde{\mathcal{X}}(:,:,i) = \mathbf{R}_i = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{X}}_i(t)\tilde{\mathbf{X}}_i^H(t)] \quad (8)$$

图 2 给出了一个基于 4 个传声器、2 条有效分析频带的缺省增广虚拟域张量示例。

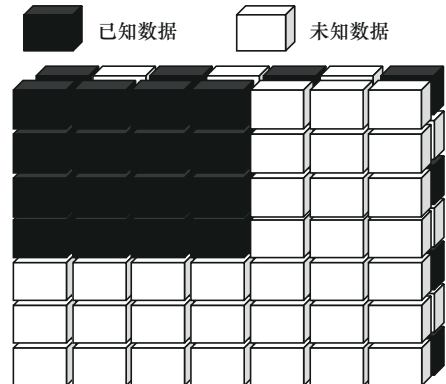


图 2 缺省增广虚拟域张量

2 张量补全算法

2.1 子张量重构算法

基于虚拟域的宽带信号 DOA 估计的重要步骤之一为张量补全, 可利用低秩张量补全算法对式(8)中缺省的增广虚拟域张量 $\tilde{\mathcal{X}}$ 进行补全。低秩张量补全算法的性能与张量中缺失元素的分布位置有关。由图 2 可知, $\tilde{\mathcal{X}}$ 中存在片缺失, 这种不规则的缺失模式会严重影响低秩张量补全算法的性能^[29-30]。针对此问题, 现有研究主要是对 $\tilde{\mathcal{X}}$ 的前向切片进行 Toeplitz 重构, 通过确保每个前向切片不存在行或列缺失来改善补全效果^[24]。Toeplitz 重构依赖其结构的强约束性和样本协方差矩阵的统计精度。在低信噪比条件下, 该方法会导致噪声泄漏到信号子空间中, 破坏信号子空间的结构。在低快拍条件下, 协方差矩阵的估计误差增大, Toeplitz 重构会放大误差, 引起信号子空间失真。为此, 本文提出一种子张量重构算法, 对缺省虚拟域张量 $\tilde{\mathcal{X}}$ 进行重构, 实现低信噪比和低快拍条件下的准确估计。

首先, 将 $\tilde{\mathcal{X}}$ 分割成 $U_x \times U_y$ 个部分重叠的子张量 $\mathcal{S}_{u_x, u_y} \in \mathbb{C}^{L_x \times L_y \times P}$ 。其中, (u_x, u_y) 表示子张量的索引, $u_x \in \{1, 2, \dots, U_x\}$, $u_y \in \{1, 2, \dots, U_y\}$, $U_x = M_v + 1 - L_x$, $U_y = M_v + 1 - L_y$ 。图 3 给出了一个基于 4 个传声器、2 条有效分析频带的缺省增广虚拟域张量的分割过程。

子张量 $\mathcal{S}_{u_x, u_y}, \mathcal{S}_{u_x+1, u_y}$ 在纵轴方向上存在一步位移关系

$$\mathcal{S}_{u_x+1, u_y} = \mathcal{S}_{u_x, u_y} \cdot e^{-\frac{j2\pi f_0}{c} d \sin(\theta_k)} \quad (9)$$

沿第四维将 $\mathcal{S}_{1, u_y}, \mathcal{S}_{2, u_y}, \dots, \mathcal{S}_{U_x, u_y}$ 进行拼接: $\mathcal{Y}_{u_y} =$

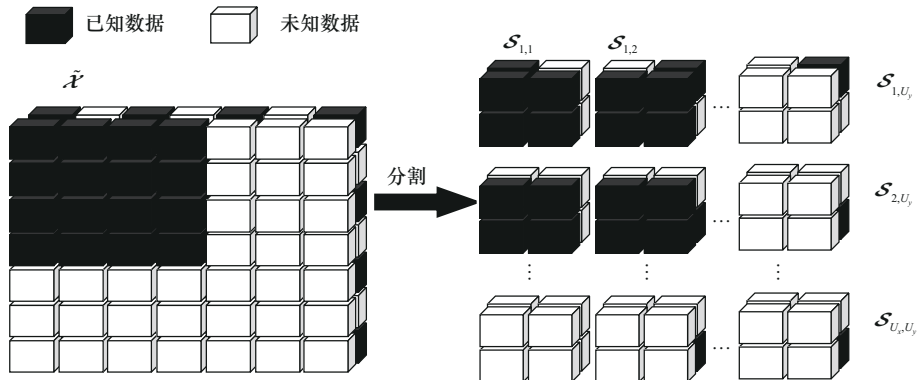


图 3 张量分割操作

$$[\mathcal{S}_{1, u_y}, \mathcal{S}_{2, u_y}, \dots, \mathcal{S}_{U_x, u_y}] \in \mathbb{C}^{L_x \times L_y \times P \times U_x}$$

沿第五维将四维张量 $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_{U_y}$ 进行拼接:

$$\mathbf{\Gamma} = [\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_{U_y}] \in \mathbb{C}^{L_x \times L_y \times P \times U_x \times U_y}$$

由此可将虚拟域张量 $\tilde{\mathcal{X}}$ 中的缺失元素分布在 5 个维度上, 可表示为

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_{k=1}^K \mathbf{v}_{L_x}(\theta_k) \circ \mathbf{v}_{L_y}^H(\theta_k) \circ \mathbf{g}_k \circ \mathbf{h}_{U_x}(\theta_k) \circ \mathbf{h}_{U_y}^H(\theta_k) \quad (10)$$

其中, $\mathbf{v}_{L_x}(\theta_k) = [1, e^{-\frac{j2\pi f_0}{c} d \sin(\theta_k)}, \dots, e^{-\frac{j2\pi f_0}{c} (L_x - 1) d \sin(\theta_k)}]$ 表示沿阵元域的角度信息维度, $\mathbf{v}_{L_y}^H(\theta_k) = [1, e^{\frac{j2\pi f_0}{c} d \sin(\theta_k)}, \dots, e^{\frac{j2\pi f_0}{c} (L_y - 1) d \sin(\theta_k)}]$ 表示沿共轭阵元域的角度信息维度, $\mathbf{h}_{U_x}(\theta_k) = [1, e^{-\frac{j2\pi f_0}{c} d \sin(\theta_k)}, \dots, e^{-\frac{j2\pi f_0}{c} (U_x - 1) d \sin(\theta_k)}]$ 表示沿阵元域的移位信息维度, $\mathbf{h}_{U_y}^H(\theta_k) = [1, e^{\frac{j2\pi f_0}{c} d \sin(\theta_k)}, \dots, e^{\frac{j2\pi f_0}{c} (U_y - 1) d \sin(\theta_k)}]$ 表示沿共轭阵元域的移位信息维度, $\mathbf{g}_k = [\sigma_k^{(1,1)}, \sigma_k^{(2,2)}, \dots, \sigma_k^{(P,P)}]^T$ 表示频率信息维度, $\sigma_k^{(i,i)}$ 表示第 k 个声源在频点 f_i 处的能量, $(\cdot)^H$ 表示共轭转置, \circ 表示外积。

将五维张量 $\mathbf{\Gamma}$ 的第一、第二维度进行维度合并, 构建表征角度信息的复合维度, 并将第四、第五维度进行维度合并, 构建表征移位信息的复合维度, 从而得到缺省重构张量 $\tilde{\mathcal{D}} \in \mathbb{C}^{L_x L_y \times U_x U_y \times P}$

$$\tilde{\mathcal{D}} = \mathbf{\Gamma}_{\{1,2\}\{4,5\}\{3\}} = \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{v}}_k \circ \tilde{\mathbf{h}}_k \circ \mathbf{g}_k \quad (11)$$

其中, $\tilde{\mathbf{v}}_k = \mathbf{v}_{L_x}(\theta_k) \otimes \mathbf{v}_{L_y}^H(\theta_k) \in \mathbb{C}^{1 \times L_x L_y}$ 表示角度维, $\tilde{\mathbf{h}}_k = \mathbf{h}_{U_x}(\theta_k) \otimes \mathbf{h}_{U_y}^H(\theta_k) \in \mathbb{C}^{1 \times U_x U_y}$ 表示移位

维, \otimes 表示克罗内积。

由于声源数量远小于虚拟传声器数量, 因此缺省增广虚拟域张量 $\tilde{\mathcal{X}}$ 具有低秩性, 而缺省重构张量 $\tilde{\mathcal{D}}$ 由 $\tilde{\mathcal{X}}$ 经过张量分割、子张量拼接和维度合并三步操作构成, 仍保持原始张量的低秩性, 因此 $\tilde{\mathcal{D}}$ 可以利用低秩张量补全算法进行补全。

相较于缺省增广虚拟域张量 $\tilde{\mathcal{X}}$, 缺省重构张量 $\tilde{\mathcal{D}}$ 通过缺失元素的优化重分布, 能减少优化算法从初始点到最优解的距离, 同时避免优化算法陷入局部最优解, 有效提升了低秩张量补全算法的收敛性和准确性, 且更易于满足张量 CP 分解的唯一性条件。

2.2 基于 TNN 的重构张量补全算法

宽带信号 DOA 估计中的重构张量补全问题可表述为最小张量秩的约束优化

$$\begin{aligned} & \min_{\mathcal{D}} \text{rank}(\mathcal{D}) \\ & \text{s.t. } \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{D}}) \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\text{rank}(\mathcal{D})$ 表示完整的重构张量 \mathcal{D} 的秩, Ω 表示缺省重构张量已知元素的下标集合, $\mathcal{P}_{\Omega}(\cdot)$ 表示投影函数, 满足

$$(\mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{D}))_{ijk} = \begin{cases} \mathcal{D}_{ijk}, (i,j,k) \in \Omega \\ 0, (i,j,k) \notin \Omega \end{cases} \quad (13)$$

在实际应用中, 张量秩非凸且不连续, 直接优化非常困难。通常利用秩的凸松弛转化为 SNN 最小化的凸优化问题, 但 SNN 需要对张量每个模态的展开矩阵进行奇异值分解, 计算复杂度较高^[31], 并且重构张量 $\tilde{\mathcal{D}}$ 相较于缺省增广虚拟域张量 $\tilde{\mathcal{X}}$, 张量维度由 (M_v, M_v, P) 扩展至 $(L_x L_y, U_x U_y, P)$, 进一步提升了计算复杂度。为此, 将基于 TNN 的张量补全算法用于宽带信号 DOA 估计中缺省重构张量的补全, 弥补重构张量维度增加引起算法复杂度提高的不足, 进而提升 DOA 估计算法的性能。

基于 TNN 的重构张量补全算法模型为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathcal{D}, \mathcal{E}} \|\mathcal{D}\|_{\text{TNN}} \\ & \text{s.t. } \mathcal{D} + \mathcal{E} = \tilde{\mathcal{D}}, \pi_{\Omega}(\mathcal{E}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $\|\mathcal{D}\|_{\text{TNN}} = \frac{1}{n_3} \sum_{i=1}^{n_3} \|\bar{\mathcal{D}}^{(i)}\|_*$, n_3 表示 \mathcal{D} 第三维的维度, 矩阵 $\bar{\mathcal{D}}^{(i)}$ 是 $\tilde{\mathcal{D}}$ 的第 i 个前向切片, 即 $\bar{\mathcal{D}}^{(i)} = \tilde{\mathcal{D}}(:, :, i)$, $\tilde{\mathcal{D}}$ 是对 \mathcal{D} 沿第三维做离散傅里叶变换得到的傅里叶变换张量, 即 $\tilde{\mathcal{D}} = \text{DFT}(\cdot, [], 3)$,

$\|\cdot\|_*$ 表示矩阵核范数, $\pi_{\Omega}(\cdot)$ 表示将 Ω 内的元素设置为零, \mathcal{E} 为辅助变量。

引入对偶变量 \mathcal{Y} , 利用交替方向乘子法 (ADMM, alternating direction method of multiplier) 求解式(14), \mathcal{D} 的递推公式为

$$\mathcal{D}_{k+1} = \arg \min_{\mathcal{D}} \|\mathcal{D}\|_{\text{TNN}} + \frac{\mu_k}{2} \left\| \mathcal{D} + \mathcal{E}_k - \tilde{\mathcal{D}} - \frac{\mathcal{D}_k}{\mu_k} \right\|_{\text{F}}^2 \quad (15)$$

其中, $\|\cdot\|_{\text{F}}$ 表示 Frobenius 范数。

辅助变量 \mathcal{E} 的递推公式为

$$\mathcal{E}_{k+1} = \pi_{\Omega} \left(\tilde{\mathcal{D}} - \mathcal{D}_{k+1} + \frac{\mathcal{D}_k}{\mu_k} \right) \quad (16)$$

对偶变量 \mathcal{Y} 的递推公式为

$$\mathcal{Y}_{k+1} = \mathcal{Y}_k + \mu_k (\tilde{\mathcal{D}} - \mathcal{D}_{k+1} - \mathcal{E}_{k+1}) \quad (17)$$

在利用 ADMM 求解补全模型式(14)时, \mathcal{D} 和 \mathcal{E} 的更新步骤都有闭式解, 同时, \mathcal{Y} 确保了对偶问题的收敛性。

基于 t-product 定义的 TNN 算法可以保持张量的多维结构, 不需要将张量展开成矩阵, 不仅能更紧密地逼近张量的低秩性质, 还降低了补全算法的复杂度。基于 TNN 的重构张量补全算法如算法 1 所示。

算法 1 基于 TNN 的重构张量补全算法

输入 缺省重构张量 $\tilde{\mathcal{D}}$, 迭代终止阈值 ε , 阈值 μ_0, μ_{\max} , 常数 ρ

输出 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{k+1}$

初始化: 给定 $\tilde{\mathcal{D}}$ 已知元素的下标集合 Ω , 设 $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{E}_0 = \mathbf{0}$;

1) for $k = 1$

2) 用式(15)计算 \mathcal{D}_{k+1}

用式(16)计算 \mathcal{E}_{k+1}

用式(17)计算 \mathcal{Y}_{k+1}

3) if $\|\mathcal{D}_{k+1} - \mathcal{D}_k\|_{\infty} \leq \varepsilon, \|\mathcal{E}_{k+1} - \mathcal{E}_k\|_{\infty} \leq \varepsilon, \|\tilde{\mathcal{D}} - \mathcal{D}_{k+1} - \mathcal{E}_{k+1}\| \leq \varepsilon$ break;

else $\mu_{k+1} = \min(\rho \mu_k, \mu_{\max})$, $k = k + 1$, 转步骤 2);

end if

4) end for

算法 1 中, 根据文献[27]及实验分析, 迭代终止阈值 $\varepsilon = 10^{-12}$, $\mu_0 = 10^{-5}$, 更新系数 $\rho = 1.1$ 。

3 基于张量 CP 分解的 DOA 估计

得到完整的重构张量 \mathcal{D} 后, 为了进行 DOA 估计, 需要对 \mathcal{D} 进行张量 CP 分解来得到包含角度信息的导向矢量

$$\mathcal{D} = \sum_{k=1}^K \mathbf{d}_1^k \circ \mathbf{d}_2^k \circ \mathbf{d}_3^k \quad (18)$$

其中, $\mathbf{d}_1^k \in \mathbb{C}^{L_x L_y \times 1}$ 是对式(11)中 $\tilde{\mathbf{v}}_k$ 的估计值, $\mathbf{d}_2^k \in \mathbb{C}^{U_x U_y \times 1}$ 是对式(11)中 $\tilde{\mathbf{h}}_k$ 的估计值, $\mathbf{d}_3^k \in \mathbb{C}^{P \times 1}$ 是对式(11)中 \mathbf{g}_k 的估计值。

式(18)的分解满足以下条件

$$\kappa_{D_1} + \kappa_{D_2} + \kappa_{D_3} \geq 2K + 2 \quad (19)$$

其中, κ_{D_1} 表示第一维的因子矩阵 D_1 的 Kruskal 秩, D_1 由 CP 分解得到的第一维的 K 个矢量拼接而成, 即 $D_1 = [\mathbf{d}_1^1, \mathbf{d}_1^2, \dots, \mathbf{d}_1^K] \in \mathbb{C}^{L_x L_y \times K}$; κ_{D_2} 和 κ_{D_3} 的含义与 κ_{D_1} 同理。

张量 \mathcal{D} 的 CP 分解具有唯一性, 即通过 CP 分解得到的导向矢量估计值与真实的导向矢量之间只有幅度差异^[18]。在理想条件下, 式(19)在非相干声源数量 $K \geq 2$ 时必然成立。

然而在实际应用中, 噪声会导致因子矩阵的 Kruskal 秩降低, 进而影响 CP 分解的唯一性。但对于重构张量 \mathcal{D} , 其维度通过子张量重构得到有效扩展, 增强了因子矩阵的稳定性, 减弱了噪声对因子矩阵 Kruskal 秩的影响。因此, 在有噪声干扰的情况下, 相较于原始张量 \mathcal{X} , 重构张量 \mathcal{D} 更容易满足张量 CP 分解的唯一性条件。

据此, 在 DOA 估计时, 可以对导向矢量的估计值进行归一化后直接进行 DOA 估计。

根据式(10)、式(11)和式(18), 声源的 DOA 估计信息 $\tilde{\theta}_k$ 可求得为

$$\tilde{\theta}_k = \frac{\tilde{\theta}_k^1 + \tilde{\theta}_k^2}{2}$$

$$\tilde{\theta}_k^1 = \arcsin \left(\frac{\sum_{\zeta_1} 2\pi f_0 d \arg \left(\frac{\mathbf{d}_{1(\zeta_1+1)}^k}{\mathbf{d}_{1(\zeta_1)}^k} \right)}{c L_x (L_y - 1)} \right)$$

$$\tilde{\theta}_k^2 = \arcsin \left(\frac{\sum_{\zeta_2} 2\pi f_0 d \arg \left(\frac{\mathbf{d}_{2(\zeta_2+1)}^k}{\mathbf{d}_{2(\zeta_2)}^k} \right)}{c U_x (U_y - 1)} \right) \quad (20)$$

其中, $\arg(\cdot)$ 表示计算复数的相位信息, $\mathbf{d}_{1(\zeta_1)}^k$ 表示 \mathbf{d}_1^k 的第 ζ_1 个分量, $\mathbf{d}_{2(\zeta_2)}^k$ 表示 \mathbf{d}_2^k 的第 ζ_2 个分量, $\zeta_1 \in \{1, 2, \dots, L_x L_y - 1\}$ 且 ζ_1 不是 L_y 的倍数, $\zeta_2 \in \{1, 2, \dots, U_x U_y - 1\}$ 且 ζ_2 不是 U_y 的倍数。

4 实验与分析

4.1 实验设置

为了验证所提算法在低信噪比和低快拍条件下的有效性, 在仿真实验中, 采用 16 阵元的均匀线性传声器阵列, 设有 2 个非相干的远场宽带声源, 入射角度分别为 -30° 和 40° , 考虑到大型工业设备通常产生中低频噪声, 将声源信号频域范围设为 100~1 000 Hz。为了评估算法的性能, 定义均方根误差 (RMSE, root mean square error) 为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{K\Psi} \sum_{k=1}^K \sum_{\psi=1}^{\Psi} (\hat{\theta}_{k,\psi} - \theta_k)^2} \quad (21)$$

其中, K 表示声源数量, Ψ 为蒙特卡罗实验次数, 实验中取 $\Psi = 100$, $\hat{\theta}_{k,\psi}$ 是第 ψ 次蒙特卡罗实验中对 θ_k 的估计值。

4.2 结果分析

4.2.1 频带数和子张量大小对 DOA 估计结果的影响

有效分析频带数和子张量的大小是影响子张量重构算法的关键因素。设置 4 组实验, 每组实验对应的有效分析频带分别为 $\text{Fre}_1 = [500, 1\ 000]$ 、 $\text{Fre}_2 = [300, 600, 900]$ 、 $\text{Fre}_3 = [250, 500, 750, 1\ 000]$ 、 $\text{Fre}_4 = [200, 400, 600, 800, 1\ 000]$ 。设置信噪比为 0, 快拍数为 300, 对于子张量 $\mathcal{S}_{u_x, u_y} \in \mathbb{C}^{L_x \times L_y \times P}$, 设 $L_x = L_y$, L_x 的选择范围为 9~29, 变化步长为 4, 利用 STR-TNN 算法得到的 RMSE 如表 1 所示。

表 1 不同 L_x 下的 RMSE

L_x	Fre_1	Fre_2	Fre_3	Fre_4
9	0.177	0.155	0.063	0.104
13	0.134	0.115	0.061	0.078
17	0.119	0.096	0.055	0.070
21	0.162	0.108	0.049	0.050
25	0.492	0.129	0.053	0.040
29	1.801	0.131	0.054	0.048

表1的实验结果表明,随着 L_x 的增大,4组实验的RMSE均呈现先下降后上升的趋势,这是因为随着子张量规模的增大,重构张量中缺失元素的分散程度提高,增强了张量补全算法的性能,提升了估计算法的精度;然而,当子张量规模过大时,导致子张量数量过少,缺失元素的分散程度降低,算法性能随之下降。

根据表1数据,确定每组实验对应的最佳子张量大小。为了探究有效分析频带数量对估计算法的影响,设置信噪比变化范围为-15~15 dB,变化步长为5 dB,计算每个信噪比处的RMSE,结果如图4所示。

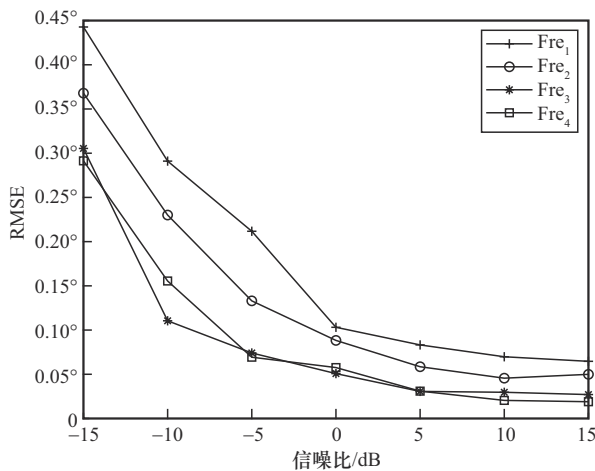


图4 不同频带数量对估计算法的影响

分析图4可知,在不同信噪比条件下进行DOA估计,实验组 Fre_3 的RMSE均小于实验组 Fre_1 和 Fre_2 ,这是因为随着频带数量增加,对应的虚拟阵列的阵列孔径随之增大,进而改善空间分辨率。当信噪比为-15 dB时, Fre_1 、 Fre_2 和 Fre_3 的RMSE分别为 0.443° 、 0.368° 和 0.305° , Fre_3 明显优于 Fre_1 和 Fre_2 ,这表明更大的阵列孔径有助于提升低信噪比环境下的估计精度。对比实验组 Fre_3 和 Fre_4 的结果,当信噪比为-15 dB时, Fre_3 的RMSE为 0.305° ,略高于 Fre_4 的 0.291° ,然而,当信噪比为-10 dB时, Fre_3 的RMSE为 0.111° ,低于 Fre_4 的 0.156° ,随着信噪比继续提高,2个实验组的RMSE曲线逐渐趋于一致,说明频带数量的增加对定位精度的改善作用有限,当频带数量小于4时,改善效果明显,当频带数量大于4后,过多的虚拟采样点导致算法过度拟合到数据的细节中,反而引入离散化误差,使估计精度下降。

综上分析,在后续实验中,固定有效分析频带为 $\text{Fre}_3 = [250, 500, 750, 1000]$,子张量大小为 $\mathcal{S}_{u_x, u_y} \in \mathbb{C}^{21 \times 21 \times 4}$ 。

4.2.2 不同补全算法性能对比

将基于SNN的子张量重构算法记为STR-SNN,基于TNN的子张量重构算法记为STR-TNN,基于TCNN的子张量重构算法记为STR-TCNN,仿真条件不变,计算STR-SNN、STR-TNN和STR-TCNN在不同信噪比下的RMSE,结果如图5所示。

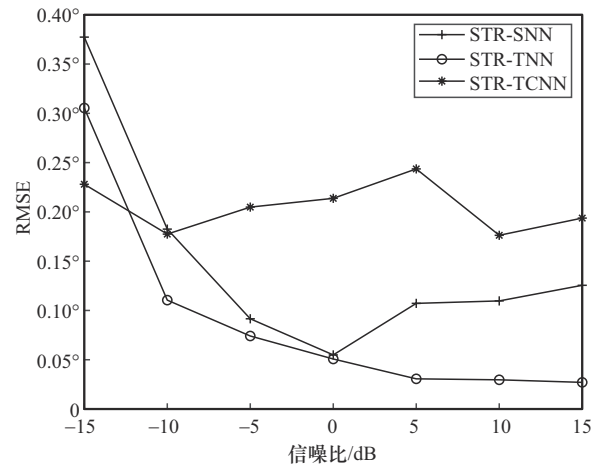


图5 STR-SNN、STR-TNN和STR-TCNN在不同信噪比下的RMSE

分析图5可知,在信噪比为-15 dB时,STR-TNN算法的RMSE为 0.305° ,低于STR-SNN算法的 0.377° ,STR-TCNN算法因为对超过阈值的奇异值进行截断操作,减少了噪声和离群点的影响^[32],所以估计精度最高,RMSE为 0.228° 。随着信噪比的提高,STR-TCNN算法的封顶操作会对信号的奇异值进行截断,导致信息损失,因此定位效果明显不如STR-SNN和STR-TNN。在信噪比为-10~15 dB时,STR-TNN算法的RMSE持续且稳定地下降,STR-SNN和STR-TCNN均有不同程度的回升,并且当信噪比为15 dB时,STR-TNN算法的RMSE为 0.027° ,显著低于STR-SNN的 0.125° 和STR-TCNN的 0.193° ,表明基于TNN的重构张量补全算法的有效性。

为了评估硬件部署可行性,对SNN、TNN和TCNN这3种算法的复杂度进行分析。在补全张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 时,对于单次迭代,SNN的核心操作是计算各模态展开矩阵核范数之和,时间复杂度

为 $O(\sum_{i=1}^3 \min(n_i(n_j n_k)^2, n_i^2 n_j n_k))$ ，空间复杂度为 $O(n_1 n_2 n_3)$ ；TNN 的核心操作是计算基于 t-SVD 的张量核范数，时间复杂度为 $O(n_3(n_1 n_2 \ln n_3 + \min(n_1 n_2^2, n_1^2 n_2)))$ ，空间复杂度为 $O(n_1 n_2 n_3)$ ；TCNN 的核心操作为计算基于 t-SVD 的张量截断核范数，当保留前 k 个奇异值时，时间复杂度为 $O(n_3(n_1 n_2 \ln n_3 + k n_1 n_2))$ ，空间复杂度为 $O(n_1 n_2 n_3)$ 。在空间复杂度方面，3 种算法相同；在时间复杂度方面，TNN 略高于 TCNN，但明显低于 SNN。

表 2 给出了 3 种算法的平均运行时间，其中最大迭代次数均为 100。STR-SNN 算法的平均运行时间最长，STR-TNN 算法的平均运行时间远低于 STR-SNN 算法和 STR-TCNN 算法，表明基于 TNN 的重构张量补全算法的低复杂性。

表 2 不同算法的运行时间

算法	运行时间/s
STR-SNN	236.605
STR-TNN	72.596
STR-TCNN	115.149

4.2.3 不同 DOA 估计算法性能对比

将文献[21]的算法简记为 HOSVD-CMF，文献[22]的算法简记为 Wideband-CP，文献[24]的算法简记为 Wideband-TC，文献[8]的算法简记为 ISSM-RootMUSIC，文献[33]的算法简记为 CSSM-DEESF，然后将这 5 种算法与所提算法 STR-TNN 的 DOA 估计性能进行对比分析。

设快拍数为 300，对上述 6 种算法在不同信噪比条件下进行蒙特卡罗仿真，设置信噪比变化范围为 -15~15 dB，变化步长为 5 dB，6 种算法的 RMSE 对比结果如图 6 所示。其中，在信噪比为 -15 dB 与 -10 dB 时，ISSM-RootMUSIC 算法估计的 RMSE 均大于 1.0°，因此图 6 中未显示其结果。

分析图 6 可知，ISSM-RootMUSIC 算法在信噪比为 -15~-5 dB 时，估计精度明显低于另外 5 种基于张量的估计算法，这是因为在信噪比小于 -5 dB 的条件下，信号子空间与噪声子空间的特征值比呈指数级衰减，导致传统子空间分解算法失效，从而无法实现高分辨率 DOA 估计。在信噪比为

-15 dB 时，STR-TNN 算法的 RMSE 为 0.305°，较 HOSVD-CMF、CSSM-DEESF、Wideband-TC 和 Wideband-CP 算法的估计精度分别提升了 68.14%、59.5%、41.27% 和 48.93%。随着信噪比继续提升，各算法的 RMSE 均下降，STR-TNN 算法的 RMSE 值始终维持在最低水平，表明了 STR-TNN 算法的有效性和抗噪性。

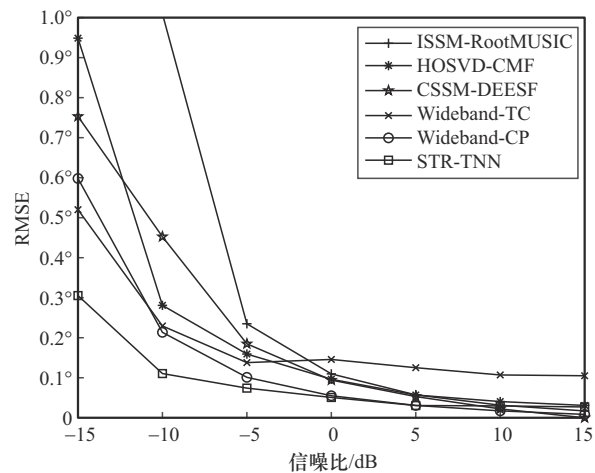


图 6 不同算法在信噪比变化时的性能对比

设信噪比为 0，对 6 种算法在不同快拍数下进行蒙特卡罗仿真，设置快拍数范围为 20~120，变化步长为 10，RMSE 对比结果如图 7 所示。

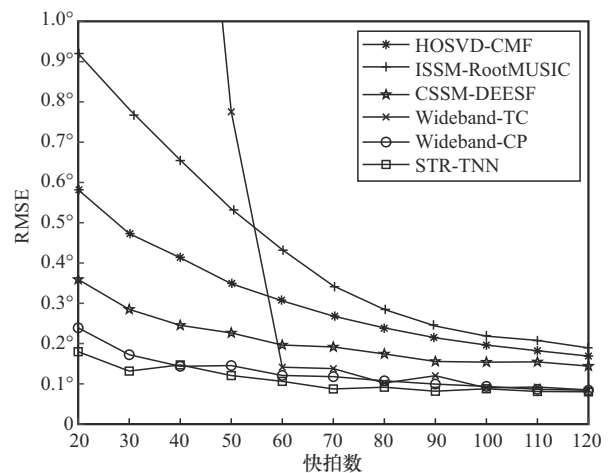


图 7 不同算法在快拍数变化时的性能对比

分析图 7 可知，Wideband-TC 算法在快拍数为 20~50 的情况下估计精度最差，均大于 1.0°，因此图 7 中未显示结果。这主要是因为 Wideband-TC 算法需要对张量前向切片进行 Toeplitz 重构，在低快拍条件下 Toeplitz 化会放大样本协方差矩阵本身

误差,影响DOA估计。在快拍数为20时,STR-TNN算法的RMSE为 0.179° ,较CSSM-DEESF、HOSVD-CMF、ISSM-RootMUSIC和Wideband-CP算法的估计精度分别提升了50.14%、76.75%、80.45%和24.76%。随着快拍数的增加,各算法的RMSE值总体上均呈下降趋势,STR-TNN算法与其他算法相比,变化相对平缓,且始终保持在最低水平,表明了STR-TNN算法的快拍鲁棒性。

5 结束语

针对现有的宽带信号DOA估计算法在低信噪比和低快拍条件下估计精度不足的问题,本文提出了一种STR-TNN宽带信号DOA估计算法。该算法利用STR算法对原始张量进行重构,提升算法的抗噪性和快拍鲁棒性;此外,利用TNN算法对重构张量进行补全,提升了算法的计算效率。通过数值仿真,得出所提算法的最佳参数组合。在不同信噪比及不同快拍数条件下,将所提算法与ISSM-RootMUSIC、CSSM-DEESF、HOSVD-CMF、Wideband-TC和Wideband-CP算法进行了对比分析,结果表明,在信噪比为 -15 dB 及以上的条件下,所提算法进行DOA估计的RMSE明显低于其他算法;在快拍数为20及以上的条件下,所提算法始终保持稳定的DOA估计性能,其RMSE较其他算法平均降低了约58.1%,体现了该算法的抗噪性和快拍鲁棒性,在中低频宽带信号($100\sim 1\,000\text{ Hz}$)的低信噪比(-15 dB)DOA估计中实现了RMSE为 0.3° 的估计精度,证实了其在典型工业噪声频段的工程适用性。

参考文献:

- [1] LEVY-ISRAEL M, BILIK I, TABRIKIAN J. MCRB on DOA estimation for automotive MIMO radar in the presence of multipath[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2023, 59(5): 4831-4843.
- [2] 徐明,唐倩.基于原子范数的波达方向与时延联合估计方法[J].通信学报,2024,45(10):153-162.
XU M, TANG Q. Joint DOA-delay estimation approach based on atomic norm[J]. Journal on Communications, 2024, 45(10): 153-162.
- [3] LIU R, LI M, LIU Q, et al. DOA estimation-oriented joint array partitioning and beamforming designs for ISAC systems[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2025, 24(3): 2052-2066.
- [4] 张小贝,张权,方明,等.宽带数字阵列雷达通道固定时延误差估计技术的研究[J].通信学报,2023,44(3):24-32.
ZHANG X B, ZHANG Q, FANG M, et al. Research on channel-fixed delay error estimation of wideband digital array radar[J]. Journal on Communications, 2023, 44(3): 24-32.
- [5] WAX M, SHAN T J, KAILATH T. Spatio-temporal spectral analysis by eigenstructure methods[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1984, 32(4): 817-827.
- [6] WANG H, KAVEH M. Estimation of angles-of-arrival for wideband sources[C]//Proceedings of the ICASSP'84. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Piscataway: IEEE Press, 1984: 279-282.
- [7] SELONE F. Robust auto-focusing wideband DOA estimation[J]. Signal Processing, 2006, 86(1): 17-37.
- [8] LIU C J, CHENG X Y, SU J, et al. Research and simulation of super-resolution root-MUSIC algorithm[C]//Proceedings of the 2023 4th International Symposium on Computer Engineering and Intelligent Communications (ISCEIC). Piscataway: IEEE Press, 2023: 95-99.
- [9] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(7): 984-995.
- [10] WANG W S, WANG X P, GUO Y H, et al. Parameter estimation with bistatic MIMO radar: a coarray tensor decomposition framework[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2025, 61(2): 4450-4465.
- [11] CHEN J L, ZHANG Y Y, YAO C H, et al. Hermitian toeplitz covariance tensor completion with missing slices for angle estimation in bistatic MIMO radars[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2024, 60(6): 8401-8418.
- [12] 李双志,杨睿棋,郭新,等.低导频开销RIS辅助毫米波MIMO系统参数化信道估计方案[J].通信学报,2024,45(9):82-91.
LI S Z, YANG R Q, GUO X, et al. Low pilot overhead parametric channel estimation scheme for RIS-assisted mmWave MIMO systems[J]. Journal on Communications, 2024, 45(9): 82-91.
- [13] 任明健,胡国平,周豪,等.基于耦合张量分解的稀疏阵列二维DOA估计算法[J].系统工程与电子技术,2023,45(4):958-964.
REN M J, HU G P, ZHOU H, et al. DOA estimation algorithm with two-dimensional sparse array based on coupling tensor decomposition[J]. Systems Engineering and Electronics, 2023, 45(4): 958-964.
- [14] ZHAN C H, HU G P, SHI J P, et al. Efficient optimized tensor-based expanded nested MIMO radar for DOD and DOA estimation[J]. IEEE Sensors Journal, 2024, 24(24): 41193-41204.
- [15] GAO S Z, MA H, LIU H W, et al. DOD and DOA estimation from incomplete data based on PARAFAC and atomic norm minimization method[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2023, 61: 5100314.
- [16] HARSHMAN R A. Foundations of the parafac procedure: models and conditions for an "explanatory" multi-modal factor analysis[J]. Ucla Working Papers in Phonetics, 1970, 16(1): 84.
- [17] SIDIROPOULOS N D, BRO R. On the uniqueness of multilinear decomposition of N-way arrays[J]. Journal of Chemometrics, 2000, 14(3): 229-239.
- [18] ZHENG H, SHI Z G, ZHOU C W, et al. Coarray tensor completion for DOA estimation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2023, 59(5): 5472-5486.
- [19] CHENG Y B, SHEN S J. Target localization for SIMO radar using ten-

- sor decomposition[C]//Proceedings of the IET International Radar Conference (IRC 2023). London: IET, 2023: 21-25.
- [20] SIDIROPOULOS N D, BRO R, GIANNAKIS G B. Parallel factor analysis in sensor array processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(8): 2377-2388.
- [21] 韦娟, 郑伟哲, 李润宇. 基于张量域降噪的宽带 DOA 估计[J]. 北京邮电大学学报, 2022, 45(3): 107-111, 116.
WEI J, ZHENG W Z, LI R Y. Wideband DOA estimation algorithm based on tensor domain denoising[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2022, 45(3): 107-111, 116.
- [22] RAIMONDI F, COMON P, MICHEL O. Wideband multilinear array processing through tensor decomposition[C]//Proceedings of the 2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Piscataway: IEEE Press, 2016: 2951-2955.
- [23] RAIMONDI F E D, FARIAS R C, MICHEL O J, et al. Wideband multiple diversity tensor array processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(20): 5334-5346.
- [24] LI K N, SHEN Q, LIU W, et al. Wideband DOA estimation based on tensor completion and decomposition[C]//Proceedings of the 2024 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). Piscataway: IEEE Press, 2024: 1-5.
- [25] SHEN Q, LIU W, CUI W, et al. Wideband DOA estimation for uniform linear arrays based on the co-array concept[C]//Proceedings of the 2015 23rd European Signal Processing Conference (EUSIPCO). Piscataway: IEEE Press, 2015: 2835-2839.
- [26] LIU J, MUSIALSKI P, WONKA P, et al. Tensor completion for estimating missing values in visual data[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 208-220.
- [27] LU C Y, PENG X, WEI Y C. Low-rank tensor completion with a new tensor nuclear norm induced by invertible linear transforms[C]//Proceedings of the 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Piscataway: IEEE Press, 2019: 5989-5997.
- [28] CHEN X, LI J, SONG Y, et al. Low-rank tensor completion for image and video recovery via capped nuclear norm[J]. IEEE Access, 2019, 7: 112142-112153.
- [29] YOKOTA T, EREM B, GULER S, et al. Missing slice recovery for tensors using a low-rank model in embedded space[C]//Proceedings of the 2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE Press, 2018: 8251-8259.
- [30] ZHENG H, ZHOU C W, DE ALMEIDA A L F, et al. DOA estimation via coarray tensor completion with missing slices[C]//Proceedings of the ICASSP 2022 - 2022 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Piscataway: IEEE Press, 2022: 5053-5057.
- [31] XU H H, ZHENG J W, YAO X M, et al. Fast tensor nuclear norm for structured low-rank visual inpainting[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2022, 32(2): 538-552.
- [32] WEI J, HE Y T, NING W C. Non-synchronous measurements acoustic imaging method based on capped nuclear norm minimization[J]. Journal of Theoretical and Computational Acoustics, 2024, 32: 2340008.
- [33] 曹司磊, 曾维贵, 胥辉旗. 基于特征向量空间聚焦的宽带 DOA 估计算法[J]. 系统工程与电子技术, 2021, 43(2): 294-299.
CAO S L, ZENG W G, XU H Q. Broadband DOA estimation method based on eigenvector space focusing[J]. Systems Engineering and Electronics, 2021, 43(2): 294-299.

[作者简介]



韦娟 (1973-), 女, 陕西渭南人, 博士, 西安电子科技大学教授, 主要研究方向为声音信号处理、移动通信网络、人工智能等。



陈茂楠 (2001-), 女, 江西吉安人, 西安电子科技大学硕士生, 主要研究方向为信号处理、声源定位等。



宁方立 (1974-), 男, 山东泗水人, 博士, 西北工业大学教授, 主要研究方向为振动噪声控制、智能感知机器人、噪声源定位与识别等。